Ročník 6., Číslo I., duben 2011

APROXIMACE KŘIVEK V MATLABU – TRIGONOMETRICKÉ POLYNOMY

CURVE FITTING IN MATLAB – TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL

Jiří Kulička[1]

Anotace: Článek se zabývá odvozením, algoritmizací a popisem konstrukce trigonometrického polynomu. Jsou zde popsány a vysvětleny základní výpočetní postupy týkající se této problematiky, nejprve je proveden teoretický rozbor, pak následuje řešený příklad a výpisy funkcí v Matlabu s vysvětlujícím komentářem.

Klíčová slova: Trigonometrický polynom, algoritmizace, aproximace, Matlab.

Summary: The article deals with derived, algorithm design and description of the trigonometric polynomial. There are described and explained the basic computational procedures regarding this issue, first is always a theoretical analysis, followed by solved examples and extracts functions in Matlab with explanatory commentary.

Key words: Trigonometric polynomial, algorithms, approximation, Matlab.

ÚVOD

V technické praxi se velice často setkáváme se systémy, které oscilují nebo vibrují. Veličiny, které takový systém popisují, mají periodický charakter a při jejich modelování mají zásadní význam trigonometrické funkce sinus a kosinus. Lze tedy očekávat, že periodickou funkci lze aproximovat buď lineární kombinací konečného počtu goniometrických funkcí, nebo přímo nekonečnou funkční řadou, jejíž členy jsou goniometrické funkce.

1. OBECNÁ PERIODICKÁ FUNKCE

Periodická funkce je taková, pro kterou platí:

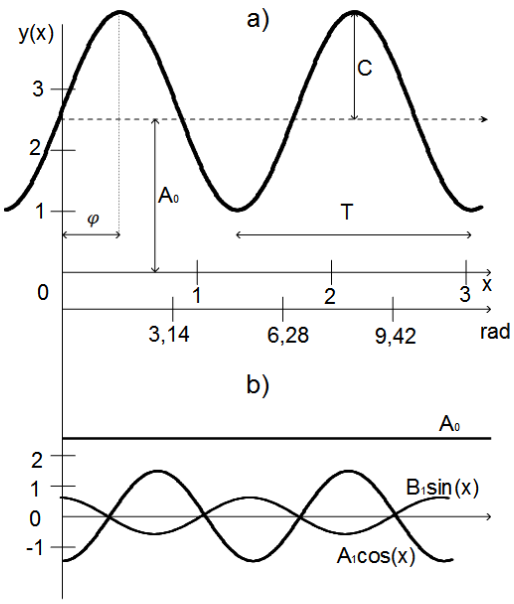
$$f(t) = f(t + T) \tag{1}$$

kde T je konstanta, které říkáme perioda a je nejmenší ze všech možných hodnot, které vyhovují rovnici (1). Dále uvažujme obecnou periodickou funkci, jejíž průběh můžeme vidět na Obr. 1a. Obecné vyjádření této funkce je:

$$f(t) = A_0 + C \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) \tag{2}$$

kde A_0 je průměrná výška křivky nad osou x, C je amplituda funkce udávající výšku oscilace, ω_0 je úhlová frekvence charakterizující počet cyklů a φ je fázový posun, charakterizující horizontální posun grafu funkce ve směru osy x (Obr. 1a,b).

[1] Mgr. Jiří Kulička, Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Katedra informatiky v dopravě, Studentská 95, 532 10 Pardubice, Tel.: +420466 036 428, E-mail: jiri.kulicka@upce.cz



Zdroj: Autor

Obr. 1 – Obecná periodická funkce

Po zavedení substituce $x = \omega_0 \cdot t$ do rovnice (2) dostaneme:

$$f(x) = A_0 + C \cdot \sin(x + \varphi) \tag{3}$$

Jelikož $\sin(x + \varphi) = \sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi$ dostáváme:

$$f(x) = A_0 + C \cdot \sin x \cdot \cos\varphi + C \cdot \cos x \cdot \sin\varphi \tag{4}$$

Označíme: $A_1 = C \cdot \sin\varphi$, $B_1 = \mathrm{C} \cdot \cos \varphi$, dosadíme do (4):

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot \cos x + B_1 \cdot \sin x + r \tag{5}$$

kde r je reziduum, neboli odchylka funkce a její aproximace.

Předpokládejme, že máme N ekvidistantních měření $[x_i, y_i]$, $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{N}$. Metodou nejmenších čtverců budeme minimalizovat střední kvadratickou chybu:

$$N\big(E_2(f)\big)^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (A_0 + A_1 \cdot \cos x_i + B_1 \cdot \sin x_i)]^2 \tag{6}$$

Parciální derivace podle proměnných A_0, A_1, B_1 položíme rovné nule.

$$\frac{\partial N\big(E_2(f)\big)^2}{A_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cdot \cos x_i + B_1 \cdot \sin x_i)] \cdot (-1)\} = 0$$

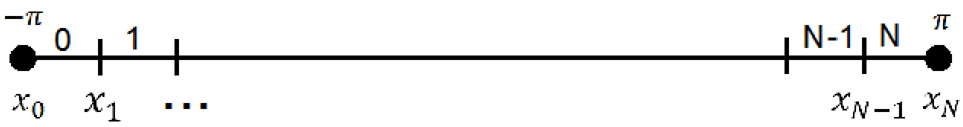
$$\frac{\partial N\big(E_2(f)\big)^2}{A_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cdot \cos x_i + B_1 \cdot \sin x_i)] \cdot (-\cos x_i)\} = 0$$

$$\frac{\partial N\big(E_2(f)\big)^2}{B_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cdot \cos x_i + B_1 \cdot \sin x_i)] \cdot (-\sin x_i)\} = 0$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic zapsanou maticově:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N}\cos x_i & \sum_{i=1}^{N}\sin x_i \\ \sum_{i=1}^{N}\cos x_i & \sum_{i=1}^{N}\cos^2 x_i & \sum_{i=1}^{N}\sin x_i\cdot\cos x_i \\ \sum_{i=1}^{N}\sin x_i & \sum_{i=1}^{N}\cos x_i\cdot\sin x_i & \sum_{i=1}^{N}\sin^2 x_i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\cos x_i \\ \sum_{i=1}^{N} \mathrm{y}_\mathrm{i}\cdot\sin x_i \end{bmatrix} \tag{7}$$

Před řešením této soustavy rovnic ještě provedeme úvahy pro speciální případ ekvidistantních bodů x_i , omezíme se jen na interval $< -\pi, \pi >$ a vypočítáme součty v matici na levé straně soustavy (7).



Zdroj: Autor

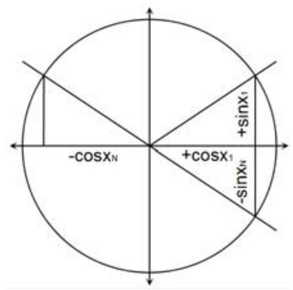
Obr. 2 – Ekvidistantní body v intervalu $< -\pi, \pi >$

Jednotlivé body jsou: $x_i = -\pi + \frac{2\cdot\pi\cdot i}{N}$, kde $i = 0, 1, \dots, N$.

Vyjádříme součet:

$$\sum_{i=1}^{N}\sin x_i = \sin x_1 + (\sin x_2 + \sin x_N) + (\sin x_3 + \sin x_{N-1}) + \cdots + Z \tag{8}$$

Je-li N liché, je $Z = \left(\sin x_{\frac{N+1}{2}} + \sin x_{\frac{N+1}{2}-1}\right)$ a je-li N sudé je $Z = \sin x_{\frac{N}{2}+1} = \sin\frac{2\cdot\pi}{N}\cdot\frac{N}{2} = \sin\pi = 0$, ale v obou případech je vždy součet roven nule, což vidíme i z Obr. 3. Situace je stejná pro $\sum_{i=1}^{N}\cos x_i$ i pro $\sum_{i=1}^{N}\sin x_i\cdot\cos x_i$ $(\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot x))$.



Zdroj: Autor

Obr. 3 – Jednotková kružnice

V případě $\sum_{i=1}^{N}\cos^2 x_i$ a $\sum_{i=1}^{N}\sin^2 x_i$, použijeme tyto úpravy:

$$\sum_{i=1}^{N}\cos^2 x_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1+\cos(2\cdot x_i)}{2} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\cos(2\cdot x_i) = \frac{N}{2} \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sin^2 x_i = \sum_{i=1}^{N}(1-\cos^2 x_i) = \frac{N}{2} \tag{10}$$

Po těchto úvahách můžeme rovnici (7) přepsat na tvar:

$$\begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\cos x_i \\ \sum_{i=1}^{N} \mathrm{y_i}\cdot\sin x_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

Inverzní matice k regulární matici soustavy v rovnici (11) je: $\begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} \end{bmatrix}$. Neznámé koeficienty můžeme vyjádřit:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\cos x_i \\ \sum_{i=1}^{N} \mathrm{y_i}\cdot\sin x_i \end{bmatrix} \tag{12}$$

nebo $$A_0 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{13}$$

$$A_1 = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\cos x_i \tag{14}$$

$$\mathrm{B_1} = \frac{2}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{y_i}\cdot\sin \mathrm{x_i} \tag{15}$$

2. ZOBECNĚNÍ

Periodickou funkci s periodou 2π danou N+1 ekvidistantními body $\{[x_i, y_i]\}_{i=0}^{N}$, kde $\mathrm{i} = 0, 1, \cdots, N$, pro které platí: $x_i = -\pi + \frac{2\cdot\pi\cdot i}{N}$, můžeme aproximovat trigonometrickým polynomem:

$$T_M(x) = A_0 + A_1\cdot\cos x + B_1\cdot\sin x + \cdots + A_M\cdot\cos(M\cdot x) + B_M\cdot\sin(M\cdot x) \tag{16}$$

kde koeficienty $\mathrm{A_j}$ a $\mathrm{B_j}$ vypočítáme:

$$A_0 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{17}$$

$$A_j = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot\cos(j\cdot x_i),\ \text{kde } j = 1, 2, \cdots, M \tag{18}$$

$$B_j = \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} \mathrm{y_i}\cdot\sin(j\cdot x_i),\ \text{kde } j = 1, 2, \cdots, M \tag{19}$$

M se nazývá stupeň trigonometrického polynomu a platí pro něj: $N > 2\cdot M + 1$.

Ačkoliv formule (17), (18), (19) jsou definovány pomocí metody nejmenších čtverců, používáme je i jako numerickou aproximaci integrálů:

$$A_j = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(j \cdot x)\, dx, \text{ kde } j = 0, 1, 2, \cdots, M \tag{20}$$

$$B_j = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(j \cdot x)\, dx, \text{ kde } j = 1, 2, \cdots, M, \tag{21}$$

kterými spočítáme koeficienty Fourierovy řady spojité funkce pro proložení křivky diskrétními body.

3. PŘÍKLAD 1:

Použijeme dvanáct ekvidistantních bodů $x_k = -\pi + \frac{2\cdot\pi}{N} \cdot (k-1)$ pro $k = 1, 2, \dots, 13$ (N=12) a nalezneme aproximaci bodů $\{[x_k; f(x_k)]\}_{k=1}^{12}$ trigonometrickým polynomem stupně M=5, kde $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$.

Tab. 1 - Výpočet koeficientů trigonometrického polynomu 5. stupně pomocí MS EXCEL

k	x_k	y_k	$\cos x_k$	$\cos 2x_k$	$\cos 3x_k$	$\cos 4x_k$	$\cos 5x_k$	$y_k*\cos x_k$	$y_k*\cos 2x_k$	$y_k*\cos 3x_k$	$y_k*\cos 4x_k$	$y_k*\cos 5x_k$
1	-3,14159	4,93480	-1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000	-4,93480	4,93480	-4,93480	4,93480	-4,93480
2	-2,61799	3,42695	-0,86603	0,50000	0,00000	-0,50000	0,86603	-2,96782	1,71347	0,00000	-1,71347	2,96782
3	-2,09440	2,19325	-0,50000	-0,50000	1,00000	-0,50000	-0,50000	-1,09662	-1,09662	2,19325	-1,09662	-1,09662
4	-1,57080	1,23370	0,00000	-1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	-1,23370	0,00000	1,23370	0,00000
5	-1,04720	0,54831	0,50000	-0,50000	-1,00000	-0,50000	0,50000	0,27416	-0,27416	-0,54831	-0,27416	0,27416
6	-0,52360	0,13708	0,86603	0,50000	0,00000	-0,50000	-0,86603	0,11871	0,06854	0,00000	-0,06854	-0,11871
7	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
8	0,52360	0,13708	0,86603	0,50000	0,00000	-0,50000	-0,86603	0,11871	0,06854	0,00000	-0,06854	-0,11871
9	1,04720	0,54831	0,50000	-0,50000	-1,00000	-0,50000	0,50000	0,27416	-0,27416	-0,54831	-0,27416	0,27416
10	1,57080	1,23370	0,00000	-1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	-1,23370	0,00000	1,23370	0,00000
11	2,09440	2,19325	-0,50000	-0,50000	1,00000	-0,50000	-0,50000	-1,09662	-1,09662	2,19325	-1,09662	-1,09662
12	2,61799	3,42695	-0,86603	0,50000	0,00000	-0,50000	0,86603	-2,96782	1,71347	0,00000	-1,71347	2,96782
13	3,14159	4,93480	-1,00000	1,00000	-1,00000	1,00000	-1,00000	-4,93480	4,93480	-4,93480	4,93480	-4,93480
	Σ	24,94817					Σ	-17,21276	8,22467	-6,57974	6,03142	-5,81632
					a_0	**2,07901**	**a_j**	**-2,86879**	**1,37078**	**-1,09662**	**1,00524**	**-0,96939**
k	x_k	y_k	$\sin x_k$	$\sin 2x_k$	$\sin 3x_k$	$\sin 4x_k$	$\sin 5x_k$	$y_k*\sin x_k$	$y_k*\sin 2x_k$	$y_k*\sin 3x_k$	$y_k*\sin 4x_k$	$y_k*\sin 5x_k$
1	-3,14159	4,93480	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	-2,61799	3,42695	-0,50000	0,86603	-1,00000	0,86603	-0,50000	-1,71347	2,96782	-3,42695	2,96782	-1,71347
3	-2,09440	2,19325	-0,86603	0,86603	0,00000	-0,86603	0,86603	-1,89941	1,89941	0,00000	-1,89941	1,89941
4	-1,57080	1,23370	-1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	-1,00000	-1,23370	0,00000	1,23370	0,00000	-1,23370
5	-1,04720	0,54831	-0,86603	-0,86603	0,00000	0,86603	0,86603	-0,47485	-0,47485	0,00000	0,47485	0,47485
6	-0,52360	0,13708	-0,50000	-0,86603	-1,00000	-0,86603	-0,50000	-0,06854	-0,11871	-0,13708	-0,11871	-0,06854
7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
8	0,52360	0,13708	0,50000	0,86603	1,00000	0,86603	0,50000	0,06854	0,11871	0,13708	0,11871	0,06854
9	1,04720	0,54831	0,86603	0,86603	0,00000	-0,86603	-0,86603	0,47485	0,47485	0,00000	-0,47485	-0,47485
10	1,57080	1,23370	1,00000	0,00000	-1,00000	0,00000	1,00000	1,23370	0,00000	-1,23370	0,00000	1,23370
11	2,09440	2,19325	0,86603	-0,86603	0,00000	0,86603	-0,86603	1,89941	-1,89941	0,00000	1,89941	-1,89941
12	2,61799	3,42695	0,50000	-0,86603	1,00000	-0,86603	0,50000	1,71347	-2,96782	3,42695	-2,96782	1,71347
13	3,14159	4,93480	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
							Σ	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
							b_j	**0,00000**	**0,00000**	**0,00000**	**0,00000**	**0,00000**

Zdroj: Autor

Protože je daná funkce sudá, tak koeficienty u členů se sinem jsou rovny nule. Trigonometrický polynom pátého stupně je roven:

$$T_5(x) = 2{,}07901 - 2{,}86879 \cdot \cos x + 1{,}37078 \cdot \cos(2 \cdot x) - 1{,}09662 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1{,}00524 \cdot \cos(4 \cdot x) - 0{,}96939 \cdot \cos(5 \cdot x)$$

Výpočet v Matlabu vrací koeficienty, které vidíme v Tab. 2:

Tab. 2 - Koeficienty trigonometrického polynomu spočítané Matlabem

A_0=2.07901	A_1=−2.86879	A_2=1.37078	A_3=−1.09662	A_4=1.00524	A_5=−0.96937
	B_1=0	B_2=0	B_3=0	B_4=0	B_5=0

Zdroj: Autor

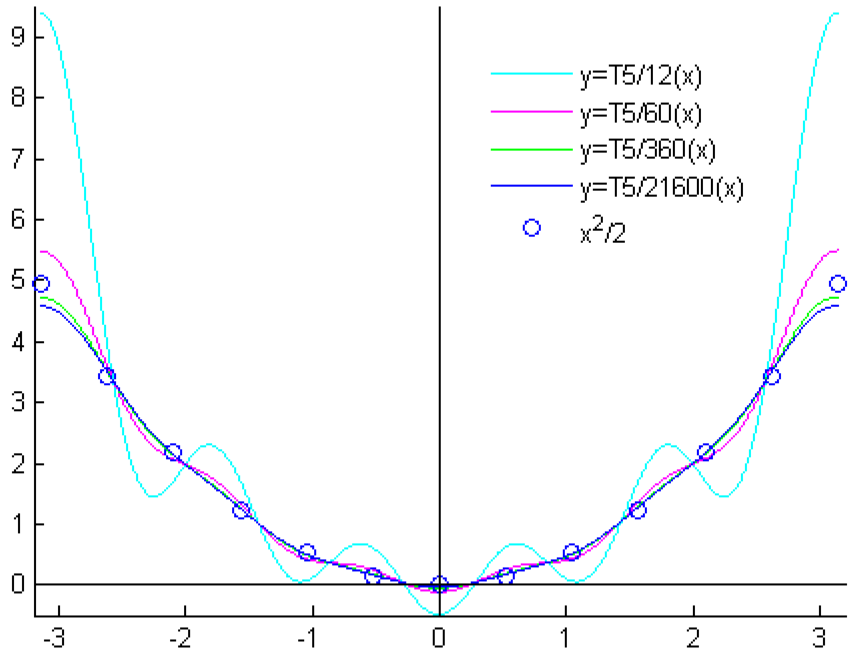
Pro zajímavost ukažme, jak by vypadala aproximace dané funkce pro 60, 360, resp. 21600 ekvidistantních bodů a porovnejme je s koeficienty Fourierovy řady. Je zde pěkně vidět, že koeficienty Fourierovy řady jsou limitním případem koeficientů trigonometrických polynomů pro n jdoucí k nekonečnu.

Tab. 3 - Koeficienty trigonometrického polynomu pátého stupně

Počet ekvidistantních bodů	12	60	360	21600	Koeficienty Fourierovy řady
A_0	2,07901	1.72809	1.65867	1.64516	1,64493
A_1	-2,86879	-2.16632	-2.02747	-2.00046	-2,00000
A_2	1,37078	0.66633	0.52747	0.50046	0,50000
A_3	-1,09662	-0.38855	-0.24969	-0.22268	-0,22222
A_4	1,00524	0.29134	0.15247	0.12546	0,12500
A_5	-0,96939	-0.24635	-0.10747	-0.08046	-0,08000

Zdroj: Autor

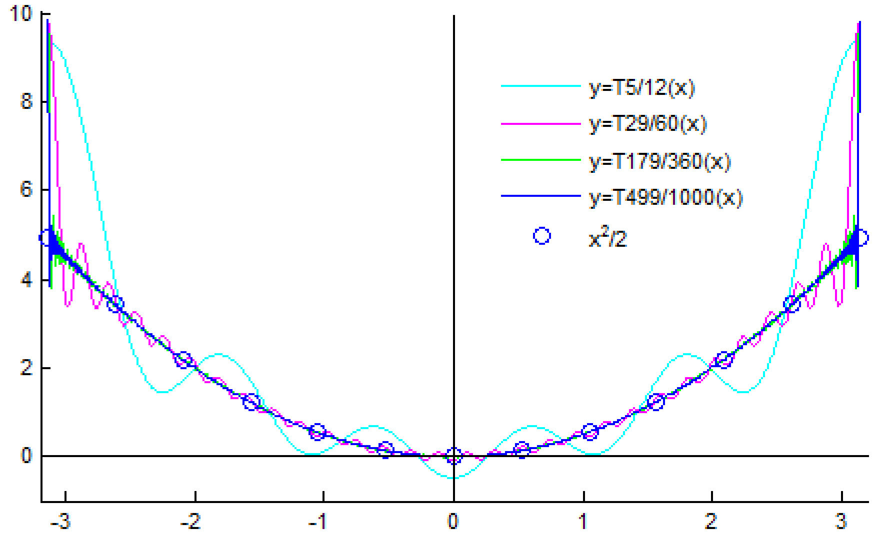
Na Obr. 4 vidíme grafy trigonometrických polynomů pátého stupně. Interval $\langle -\pi; \pi \rangle$ je rozdělen na 12, 60, 360 resp. 21600 ekvidistantních bodů.



Zdroj: Autor

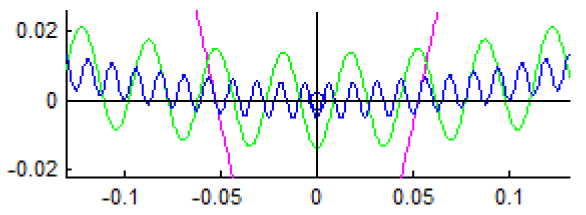
Obr. 4 - Trigonometrické polynomy pátého stupně pro daný počet ekvidistantních bodů

Na Obr. 5 můžeme vidět trigonometrické polynomy řádu 5, 29, 179 a 499. Na Obr. 6 je zvětšený detail z Obr. 5.



Zdroj: Autor

Obr. 5 - Ukázka Trigonometrických polynomů řádu 5, 29, 179 a 499



Zdroj: Autor

Obr. 6 - Detail z Obr. 5

4. PŘÍKLAD 2

Použijeme sto ekvidistantních bodů $x_k = -\pi + \frac{2\cdot\pi}{N}\cdot(k-1)$ pro $k = 1, 2, \ldots, 100$ (N=100) v intervalu $\langle -\pi; \pi\rangle$ a nalezneme aproximaci bodů $\{[x_k; f(x_k)]\}_{k=1}^{100}$ trigonometrickým polynomem stupně M=7, kde $f(x) = e^x$.

Příslušný M-soubor v Matlabu s využitím funkce **tpkoef** a **tp** v kapitole 5:

```
X=[-pi:2*pi/100:pi];          %naplnění vektoru X sto ekvidistantními body
Y=exp(X);                     %naplnění vektoru Y příslušnými hodnotami
[A,B]=tpkoef(X,Y,7)           %volání funkce pro výpočet koeficientů
x=min(X):0.001:max(X);        %naplnění vektoru x pro kreslení grafu
y=tp(A,B,x,7);                %výpočet hodnot trigonometrického polynomu
hold on                       %přikreslování do grafu
plot(x,y,X,Y)                 %kreslení grafů
```

```
plot([min(x),max(x)],[0,0],'k')          %kreslení os x a y
plot([0,0],[min(y)-2,max(y)+1.5],'k')
legend('T7(x)','e^x')                    %legenda
```

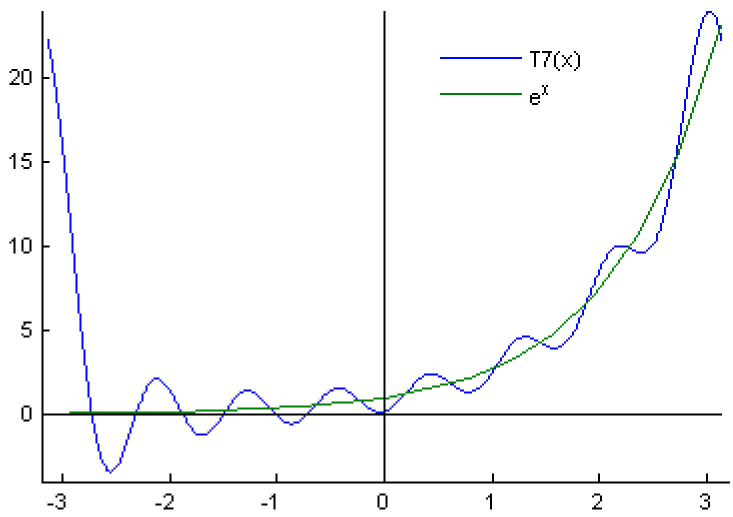
Matlab nám vypočítá koeficienty trigonometrického polynomu sedmého řádu (Tab. 4) a nakreslí příslušný graf (Obr. 7). Jeho tvar vidíme v následující rovnici:

$$\begin{gathered}T_7(x) = 4{,}44770 - 5{,}22004 \cdot \cos x + 3{,}58208 \cdot \sin x + 3{,}01661 \cdot \cos(2 \cdot x) + \\ -2{,}75145 \cdot \sin(2 \cdot x) - 2{,}28520 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1{,}91784 \cdot \sin(3 \cdot x) + \\ +1{,}98844 \cdot \cos(4 \cdot x) - 1{,}33901 \cdot \sin(4 \cdot x) - 1{,}84712 \cdot \cos(5 \cdot x) + \\ +0{,}91301 \cdot \sin(5 \cdot x) + 1{,}77477 \cdot \cos(6 \cdot x) - 0{,}57170 \cdot \sin(6 \cdot x) + \\ -1{,}73940 \cdot \cos(7 \cdot x) + 0{,}27595 \cdot \sin(7 \cdot x)\end{gathered}$$

Tab. 4- Koeficienty trigonometrického polynomu z příkladu 2

A_0=4.44770	A_1=-5.22004	A_2=3.01661	A_3=−2.28520	A_4=1.98844	A_5=−1.84712	A_6=1.77477	A_7=−1.73940
	B_1=3.58208	B_2=−2.75145	B_3=1.91784	B_4=−1.33901	B_5=0.91301	B_6=−0.57170	B_7=0.27595

Zdroj: Autor



Zdroj: Autor

Obr. 7- Trigonometrický polynom z příkladu 2

5. M-SOUBOR MATLAB

Konstrukce trigonometrického aproximačního polynomu stupně M:

$T_M(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{M}\left(A_j \cdot \cos(j \cdot x) + B_j \cdot \sin(j \cdot x)\right)$ založený na N ekvidistantních hodnotách $x_k = -\pi + \frac{2\pi \cdot k}{N}$ pro $k = 1, 2, \cdots, N$. Konstrukce je možná pouze pro 2M+1≤N.

```
function [A,B]=tpkoef(X,Y,M)
%Vstup  X        vektor x-ových souřadnic bodů Xi v intervalu <-π,π>
%                Y        vektor hodnot f(x)
%                M        stupeň Trigonometrického polynomu
%Výstup          A        vektor koeficientů u cos(jx)   Aj pro j=0, 1, …, M
%                B        vektor koeficientů u sin(jx)   Bj pro j=1, 2, …, M
  N=length(X)-1;
  max1=fix((N-1)/2);
  if M>max1
        M=max1;
  end
  A=zeros(1,M+1);
  B=zeros(1,M+1);
  Yends=(Y(1)+Y(N+1))/2;
  Y(1)=Yends;
  Y(N+1)=Yends;
  A(1)=sum(Y);
  for j=1:M
        A(j+1)=cos(j*X)*Y';
        B(j+1)=sin(j*X)*Y';
  end
  A=2*A/(N);
  B=2*B/(N);
  A(1)=A(1)/2;
```

Následující funkce vypočítá hodnotu trigonometrického aproximačního polynomu $T_M(x)$ stupně M pro dané x:

```
function z=tp(A,B,x,M)
  z=A(1);
  for j=1:M
        z=z+A(j+1)*cos(j*x)+B(j+1)*sin(j*x);
  end
```

Graf trigonometrického aproximačního polynomu $T_M(x)$ stupně M můžeme nakreslit následovně:

```
[A,B]=tpkoef(X,Y,M)
x=-pi:2*pi/10000:pi;
y=tp(A,B,x,M);
plot(x,y,X,Y,'o')
```

ZÁVĚR

K aproximaci periodických funkcí užíváme konečných trigonometrických řad. Názorně na příkladech jsem ukázal, že když užijeme většího počtu členů trigonometrické řady, můžeme s určitou přesností aproximovat dokonce i každou spojitou funkci na uzavřeném intervalu. Limitním případem uvedené situace je pak konstrukce Fourierovy řady.

Uvedené komentované výpisy funkcí v Matlabu budou použity ve výuce předmětu Numerické metody na DFJP UPCE.

POUŽITÁ LITERATURA

(1) MATHEWS, John – FINK, Kurtis. Numerical Methods Using MATLAB. Pearson Prentice Hall 2004, fourth edition. ISBN 0-13-191178-3.

(2) RALSTON, Antony. Základy numerické matematiky. Academia Praha 1978.

(3) VITÁSEK, Emil. Numerické metody. SNTL 1987.

(4) KARBAN, Pavel. Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink. Computer Press 2006. ISBN 80-251-1301-9.

(5) Chapra, Steven – Canale, Raymond. Numerical methods for Engineers. McGraw-Hill 2006, International Edition, fifth edition, ISBN 007-124429-8.

(6) SEIBERT, Jaroslav. Matematika III. Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, Pardubice 2007, ISBN 978-80-7194-930-5.